

CARACTERISTIQUES DES TRANSFERTS SIMULTANES DE MASSE ET DE QUANTITE DE MOUVEMENT DANS DES ECOULEMENTS DE RECIRCULATION FORCEE

G. ANTONINI, M. GELUS, G. GUIFFANT* et A. ZOULALIAN

Département de Génie Chimique, Université de Technologie de Compiègne,
 B.P. 233 (60206), Compiègne Cedex, France

(Reçue le 12 juin 1980 et sous forme modifiée le 22 décembre 1980)

Résumé — Les caractéristiques des transferts simultanés de matière et de quantité de mouvement dans des écoulements cellulaires de recirculation forcée induits par le mouvement d'une limite, sont déterminées en régime permanent par résolution numérique du système d'équations pour le transfert de masse et de vorticité, en fonction du nombre de Reynolds Re associé à la vitesse d'entraînement de la limite et du rapport d'échelle L/H des cellules.

La dépendance du facteur de frottement f aux nombres Re et L/H est exprimée sous la forme

$$f/2 = 15,9Re^{-1}(L/H)^{-0,65} \text{ pour } 0,25 \leq L/H \leq 1,5 \text{ et } Re < 250.$$

Le transfert de masse simultané est exprimé à l'aide du nombre de Sherwood Sh qui, dans la gamme des paramètres étudiés, ne dépend que du nombre de Péclet Pe et du rapport d'échelle L/H . Les lois sont données sous la forme

$$Sh = A(L/H) Pe^{N(L/H)} \text{ pour } 25 \leq Pe \leq 500 \text{ et } 0,25 \leq L/H \leq 1,5$$

où A et N sont obtenues comme fonctions explicites du rapport d'échelle avec N compris entre 0 et 0,5 pour la gamme des valeurs de L/H envisagée.

Enfin, on discute l'efficacité des transferts simultanés de masse et de quantité de mouvement dans ces écoulements de recirculation.

NOMENCLATURE

A ,	coefficient défini dans l'équation (22);	Sc ,	v/D , nombre de Schmidt;
C_0 ,	concentration sur la limite en mouvement;	Sh ,	$\bar{k}H/D$, nombre de Sherwood;
\mathcal{C} ,	concentration massique dans le fluide;	t ,	temps;
C ,	concentration massique, adimensionnelle;	U_0 ,	vitesse de la limite en mouvement;
D ,	coefficient de diffusion moléculaire;	\mathbf{v} ,	champ de vitesse dans la cellule, de composantes v_x, v_y ;
f ,	facteur de frottement défini par l'équation (14);	U ,	v_x/U_0 , vitesse adimensionnelle dans la direction- x ;
H ,	hauteur de la cellule;	V ,	v_y/U_0 , vitesse adimensionnelle dans la direction- y ;
i, j ,	indices numériques pour la discrétisation des coordonnées d'espace;	x ,	coordonnée dans la direction de la limite en mouvement;
\bar{k} ,	valeur moyenne du coefficient de transfert de masse;	X ,	x/H , coordonnée adimensionnelle;
L ,	largeur de la cellule;	y ,	coordonnée normale à la limite en mouvement;
Lf_D ,	nombre de Le Goff, adimensionnel défini par la relation (27);	Y ,	y/H , coordonnée adimensionnelle.
N ,	exposant défini dans l'équation (22);	Symboles grecs	
Nu_M ,	nombre de Nusselt mécanique défini par l'équation (15);	∇ ,	opérateur Nabla;
NUE ,	nombre d'unité de dégradation d'énergie;	ε ,	Pe^{-1} ou Re^{-1} ;
NUT_D ,	nombre d'unité de transfert de masse;	ν ,	viscosité cinématique du fluide;
Pe ,	HU_0/D , nombre de Péclet;	ρ ,	masse volumique du fluide;
P ,	champ de pression dans le fluide;	τ ,	$(U_0/H)t$; temps adimensionnel;
Re ,	HU_0/ν , nombre de Reynolds;	Ψ ,	fonction courant adimensionnelle;
		Ω ,	vorticité adimensionnelle;
		μ ,	viscosité dynamique du fluide;
		$\Phi_{e, s}$,	flux rentrant (e), flux sortant (s);
		$\Delta\tau$,	pas en temps numérique;
		$\Delta X, \Delta Y$,	pas d'espace numérique.

* L.B.H.P., Université Paris VII, 2, Place Jussieu, 75005 Paris, France.

1. INTRODUCTION

LA NECESSITE d'améliorer les performances de dispositifs d'échange de masse ou de chaleur a suscité depuis ces dernières années un regain d'intérêt pour l'étude des écoulements secondaires générés au voisinage des surfaces d'échanges.

Toutefois, il y a dans cette recherche, une contrainte sous-jacente liée au fait que l'amélioration du transfert par des écoulements secondaires est en général obtenue au détriment de la consommation de l'énergie mécanique nécessaire à l'entretien de ces écoulements.

Le présent travail concerne l'étude des caractéristiques du transfert de masse dans un régime de recirculations stationnaires générées par le mouvement d'une limite. Il s'agit là d'écoulements secondaires laminaires, mettant en jeu des lignes de courant fermées, qui font eux-mêmes partie de la catégorie plus générale des écoulements présentant des décollements. Ceux-ci ont attiré une attention considérable aussi bien sur le plan théorique que du fait de leurs nombreuses implications pour l'ingénieur. La littérature est très riche en exemples divers concernant la formation d'écoulements de recirculation forcée au voisinage d'obstacles ou de limites en mouvement et qui en soulignent l'importance quant aux processus d'amélioration du transfert. Citons le cas des tourbillons stables que l'on observe à l'arrière de sphères ou de cylindres en mouvement dans un fluide, les écoulements internes observés à l'intérieur de gouttes liquides en mouvement [1], ou de gouttes en formation [2, 3], les recirculations observées dans des écoulements en conduite présentant des variations brusques ou périodiques de section [4–10] ou des parois en rotation [11–13], ainsi que dans les jets confinés tourbillonnaires [14]. De telles structures ordonnées de recirculation peuvent également être générées à des interfaces fluide–solide ou fluide–fluide par le déclenchement d'instabilités variées type Rayleigh–Taylor, Taylor–Görtler [15] ou Kelvin–Helmholtz ou enfin en propageant mécaniquement des trains d'ondes de surface le long de la limite [16, 17].

Il est d'ailleurs intéressant de constater que ce type d'écoulement de recirculation laminaire est également observé au voisinage d'une interface lorsque, sous certaines conditions, des trains d'oscillations issus d'une turbulence développée au sein d'un fluide viennent frapper l'interface, conduisant à la formation d'une couche de cellules contre-rotatives ordonnées, adjacentes à la paroi [18, 19]. De telles couches de cellules de recirculation peuvent d'ailleurs apparaître spontanément dans des systèmes présentant des interfaces entre un solide et un fluide ou entre deux fluides au repos du fait de l'existence d'une inhomogénéité de densité résultant d'un transfert de masse ou de chaleur à travers l'interface. Les gradients normaux à l'interface créent une instabilité de convection naturelle de type Rayleigh–Bénard, tandis que les gradients longitudinaux (qui induisent des variations de la tension superficielle) provoquent une convection de type Ma-

rangoni. Un critère simple permettant de séparer ces deux effets, qui ont d'ailleurs été souvent confondus, a été donné par Scriven et Sterling [20].

Pour toutes ces situations hydrodynamiques, il est généralement admis que les recirculations (forcées ou naturelles) provoquent une augmentation significative des coefficients de transfert et particulièrement du transfert de masse du fait de la petitesse des coefficients de diffusion moléculaire qui confère à la convection un rôle prépondérant.

Deux types d'approches peuvent être utilisées pour rendre compte du rôle joué par des recirculations sur l'augmentation des coefficients de transfert massique.

La première utilise une description en terme de renouvellement de la couche limite diffusionnelle analogue à celle faite dans les différents modèles de la pénétration [21–28] mais nécessite l'introduction de paramètres souvent peu physiques.

Une deuxième approche consiste à utiliser une description explicite de l'interaction de diffusion–convection dans ces cellules de recirculation et à en déduire les coefficients de transfert aux limites en fonction des caractéristiques physiques de l'écoulement et de l'espèce transportée. Ce type d'approche, qui nécessite la résolution complète simultanée des équations de transport de masse et de quantité de mouvement, peut être simplifiée, dans un premier temps, en se contenant de résoudre l'équation de diffusion–convection dans un champ de vitesse idéalisé, fixé a priori de manière à vérifier les principales caractéristiques cinématiques des écoulements de recirculation ainsi que leurs conditions aux limites. Cette description, initialement semi-analytique [29, 30], a été développée par l'utilisation de modèles cinématiques d'écoulement de recirculation qui permettent de justifier le comportement général des lois de transfert observé aux limites fluide–fluide ou solide–fluide [31–33].

Néanmoins, aucune indication sur le rôle joué par la viscosité du fluide ou par les paramètres géométriques des cellules de recirculation n'a pu être fourni, bien que celui-ci soit essentiel [34, 35].

Le but du présent travail est d'apporter une contribution à la compréhension des caractéristiques du transfert de masse et de quantité de mouvement dans les recirculations stationnaires qui s'établissent, sous l'effet d'une condition d'entraînement de paroi, dans un fluide réel confiné dans des cavités rectangulaires, pour différentes rapport d'échelle.

2. FORMULATION DU PROBLEME

On considère le mouvement d'un fluide incompressible newtonien et de propriétés homogènes, à l'intérieur d'une cavité rectangulaire de longueur L et de profondeur H dont la limite supérieure est en mouvement dans son propre plan à la vitesse constante U_0 (Fig. 1). Un système de coordonnées x, y est défini, l'origine se trouvant au coin inférieur gauche de la cellule.

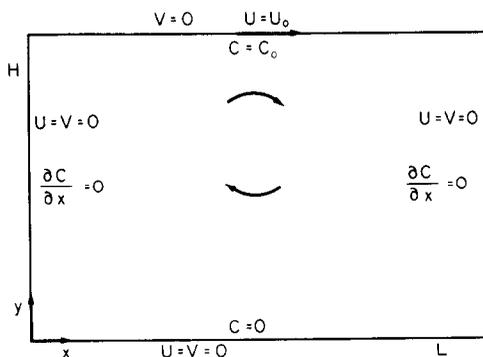


FIG. 1. Système de coordonnées et conditions aux limites.

Les effets liés à la dissipation d'énergie du fait du frottement visqueux sont considérés comme négligeables, et on suppose que la température du fluide est uniforme, en l'absence de toutes sources extérieures de chaleur. De plus, on suppose qu'à la fois la viscosité et le coefficient de diffusion moléculaire sont indépendants de la concentration.

Le problème consiste alors à déterminer le flux de masse total à travers la cellule, entre la limite supérieure et la limite inférieure, compte tenu du flux d'impulsion communiqué au fluide du fait de la condition d'entraînement de vitesse et pour différents rapports d'échelle de la cavité.

Les équations du problème sont constituées par le système complet des équations aux dérivées partielles pour la continuité et le mouvement du fluide accompagnées de l'équation de convection-diffusion pour le transfert de masse dans le fluide

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathcal{C} = D \nabla^2 \mathcal{C} \quad (3)$$

où \mathbf{v} est le champ de vitesse du fluide, de composantes v_x, v_y , ρ la densité, ν la viscosité cinématique, P le champ de pression, \mathcal{C} est le champ de concentration dans le fluide et D est le coefficient de diffusion moléculaire de l'espèce transportée.

On peut alors introduire les quantités sans dimension suivantes : le temps $\tau = (U_0/H)t$, les coordonnées $X = x/H$, $Y = y/H$, le champ de vitesse de composantes $U = v_x/U_0$, $V = v_y/U_0$, la concentration $C = \mathcal{C}/C_0$ ou C_0 est la concentration sur la plaque en mouvement

$$\begin{aligned} U(X, 0) = V(X, 0) = U(0, Y) \\ = U(L/H, Y) = V(L/H, Y) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

et

$$U(X, 1) = 1; \quad V(X, 1) = 0$$

pour la limite en mouvement.

Les conditions aux limites pour le transport de masse entre la limite supérieure et la limite inférieure

de la cellule, en l'absence de flux de masse à travers les limites latérales, sont

$$C(X, 0) = 0; \quad C(X, 1) = 1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y) = \frac{\partial C}{\partial X}(L/H, Y) = 0.$$

On suppose l'écoulement bidimensionnel, de sorte que l'équation de continuité est automatiquement satisfaite par l'introduction d'une fonction courant Ψ définie, en variable adimensionnelle par

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}; \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (6)$$

On peut, de plus, calculer les dérivées croisées des composantes sur X et Y de l'équation du mouvement du fluide; en combinant les équations obtenues on peut alors éliminer la pression. Le système des équations de continuité et de mouvement du fluide est donc remplacé par un système d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir la fonction courant Ψ et la vorticité Ω définie en variable adimensionnelle par

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (7)$$

Le système d'équations aux dérivées partielles pour le problème s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U\Omega) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\Omega) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(UC) + \frac{\partial}{\partial Y}(VC) = \frac{1}{ReSc} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right) \quad (10)$$

où

$$Re = \frac{HU_0}{\nu} \quad (11)$$

est le nombre de Reynolds du problème basé sur la vitesse d'entraînement de la limite mobile

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (12)$$

est le nombre de Schmidt.

Le produit $ReSc$ est le nombre de Péclet du problème

$$Pe = \frac{HU_0}{D}. \quad (13)$$

On prend de plus $\Psi = 0$ sur le pourtour de la cavité.

On sait que la prise en compte des termes non-linéaires dans les équations de transport de Ω et C rend difficile toute tentative de solution analytique. Il est donc nécessaire de chercher des solutions par voie numérique.

Les équations du problème ont été remplacées par un système d'équations aux différences finies et résolues au moyen d'un schéma explicite. Cette formulation dépendante du temps a été choisie pour nous permettre de décrire certains processus transitoires qui ne seront cependant pas rapportés ici, puisque, seules les solutions stationnaires seront discutées. Ainsi, dans cette approche, les conditions initiales peuvent être arbitraires et on a pris le fluide au repos à l'instant initial avec un profil linéaire de concentration dans une direction Y entre $C(X, 0) = 0$ et $C(X, 1) = 1$. Un état stationnaire aussi bien pour l'écoulement que pour le profil de concentration dans la cellule est atteint dès lors que les fonctions Ω , Ψ et C n'évoluent plus de façon notable dans l'ensemble du maillage.

On sait l'importance du choix de la formulation des termes non linéaires des équations de transport de Ω ou C sur la stabilité numérique et la convergence des résultats obtenus [36, 37]. Aussi, bien que les dérivées par rapport au temps aient été approximées par des différences avant et les dérivées par rapport à l'espace par des différences centrées trois points, une formulation particulière à base de différences décentrées à trois points [36] a été utilisée pour les termes du type $\partial/\partial X(U\Omega)$ et $\partial/\partial X(UC)$.

Le calcul avance par la détermination de nouvelles valeurs de Ω à l'intérieur du maillage à partir de la forme discrétisée de l'équation (9). Ces valeurs de Ω sont alors introduites dans la forme discrétisée de l'équation (8) qui est résolue par la méthode de relaxation successive pour donner les nouvelles valeurs de Ψ sur le maillage avec $\Psi = 0$ sur les limites. Celles-ci grâce à l'équation (6) conduisent aux nouvelles valeurs de U et V à l'intérieur du maillage, leurs valeurs aux bords étant connues par ailleurs grâce aux conditions aux limites sur U et V . L'équation (10) discrétisée peut alors donner la valeur de C de la nouvelle répartition de la concentration à l'intérieur du maillage. Les conditions aux limites (5) fixent la valeur de C sur les limites supérieures et inférieures ainsi que sur les côtés grâce aux conditions de flux nul, par exemple: $C_{1,j} = \frac{4}{3}C_{2,j} - \frac{1}{3}C_{3,j}$.

Enfin, les valeurs de Ω sur les limites fixes du maillage sont calculées à l'aide des valeurs de Ψ au voisinage des limites. Par exemple

$$\Omega_{1,j} = (\Psi_{3,j} - 8\Psi_{2,j})/2\Delta X^2;$$

$\Omega_{i,j\text{MAX}}$

$$= \frac{1}{2\Delta Y^2}(\Psi_{i,j\text{MAX}-2} - 8\Psi_{i,j\text{MAX}-1} - 6\Delta Y U_{i,j\text{MAX}}).$$

Le calcul se poursuit jusqu'à l'obtention des solutions stationnaires pour l'ensemble des fonctions Ω , Ψ , U , V et C .

Il est remarquable que cette technique numérique, basée sur l'écriture sous forme conservatrice des équations de transport de masse et de vorticité, conserve ces quantités à travers le maillage. Ainsi, par exemple, on a vérifié au cours des essais numériques, que le flux total rentrant au cours du temps sur une

limite correspondait bien à la quantité de matière effectivement présente dans la cellule à cet instant.

Il en résulte la possibilité d'utiliser comme critère de stationnarité l'égalité des flux entrant et sortant. Par ailleurs, cette technique numérique permet l'emploi d'un critère simple de stabilité (au sens de Lax et Richmayer) qui définit un pas en temps $\Delta\tau$ valable pour un maillage ΔX , ΔY donné. Dans le cas du problème envisagé, ce critère s'écrit

$$\Delta\tau = \left[\left(\frac{1}{\Delta X} + \frac{1}{\Delta Y} \right) + \varepsilon \left(\frac{2}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right) \right]^{-1}$$

où ε représente l'inverse du nombre de Reynolds Re ou du nombre de Péclet Pe selon que ce critère est appliqué à l'équation (9) ou à l'équation (10).

Ainsi, la stabilité du schéma résulte du choix du pas en temps sans qu'aucune restriction ne soit impos e au pas d'espace. Néanmoins, celui-ci est déterminant pour la convergence des résultats numériques et donc pour la crédibilité des valeurs obtenues. Différents tests numériques utilisant des pas d'espace décroissants dans des grilles uniformes ont montré que, par exemple si $L/H = 1$, un maillage $\Delta X = \Delta Y = 1/40$ fournissait un compromis acceptable entre la qualité du résultat et le temps de calcul nécessaire pour l'atteindre.

3. TRANSFERT DE QUANTITE DE MOUVEMENT

La structure des écoulements de recirculation induits par le mouvement de la limite peut être repr sent e au moyen des lignes d'écoulements dans les cellules. Ce mode de description a été largement utilisé dans la littérature concernant les écoulements dans desavit s [37-41]. Aussi, bien que notre résolution conduise à la donn e complète des lignes de courant et des lignes d'iso-vorticité en régime stationnaire pour différents nombres de Reynolds et rapports d'échelle L/H , seules les grandes lignes de cette description seront données ici, notre intérêt se portant plus particulièrement sur les résultats concernant les transferts de quantité de mouvement, les données sur cet aspect paraissant plus rares [40] dans la littérature.

Trois exemples de lignes d'écoulement obtenues par interpolation entre les points du maillage sont reproduits dans les Figs. 2(a) et (b) pour $Re = 25$ et 250 avec $L/H = 1$ et dans la Fig. 3 pour $Re = 100$ et $L/H = 0,5$.

On constate [Fig. 2(a)] qu'aux faibles valeurs du nombre de Reynolds et dans uneavit cafr e, l'écoulement est approximativement symétrique par rapport à l'axe central de laavit , et consiste en une recirculation principale à laquelle s'ajoutent deux tourbillons secondaires triangulaires contre-rotatifs dans les deux coins inférieurs de laavit , ceci en accord avec des résultats antérieurs [37-41]. Lorsque le nombre de Reynolds augmente [Fig. 2(b)], les dimensions caractéristiques des tourbillons secondaires augmentent tandis que le débit de la recirculation principale croit en même temps que ses lignes d'écoulement se dissym trisent. On constate que le centre de cette recirculation se décale dans le sens du mouvement de la limite tout en s'enfonçant dans laavit .

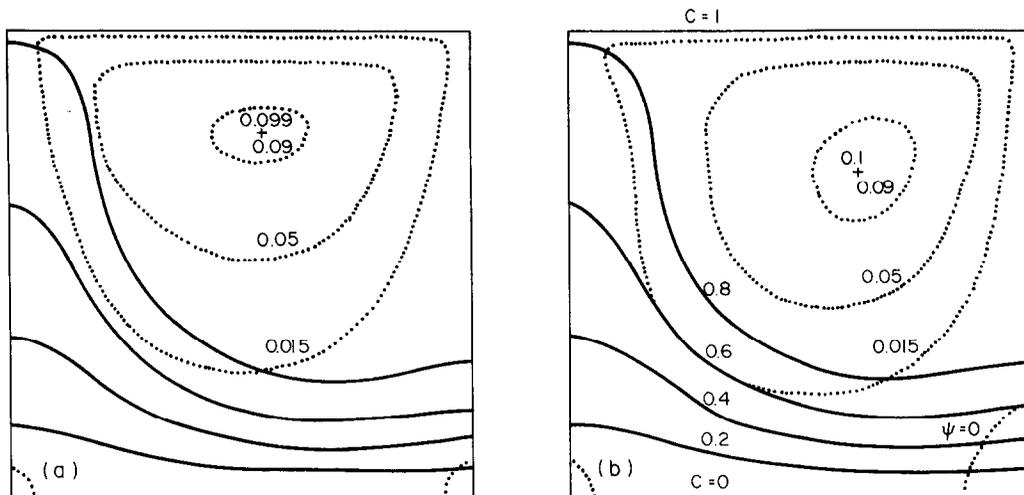


FIG. 2. Répartitions stationnaires des lignes de courant (· · ·) pour $L/H = 1$ avec $Re = 25$ (a) et $Re = 250$ (b) et des lignes d'égal concentration (—) pour $Pe = 250$.

Lorsque le rapport d'échelle diminue (Fig. 3), on observe la disparition des deux tourbillons secondaires de coin par leur fusion en un seul tourbillon secondaire contre-rotatif au fond de la cavité, la recirculation principale occupant la partie supérieure adjacente à la limite mobile, en accord avec des résultats antérieurs [37–39]. Pour des diminutions plus importantes du rapport d'échelle, ces deux tourbillons sont remplacés par une séquence verticale de tourbillons alternés de façon similaire aux résultats obtenus par Pan et Acrivos [39].

La validité des résultats numériques concernant les solutions d'écoulements a pu être testée par confronta-

tion avec des résultats obtenus par ailleurs [36, 37] qui montre un excellent accord aussi bien en ce qui concerne la position du centre du tourbillon principal que la valeur de Ω et Ψ en ce point.

Par ailleurs, on constate que la répartition de la contrainte de cisaillement le long de la limite mobile présente un minimum très aplati sur pratiquement toute la longueur de plaque et des maxima aux extrémités, c'est-à-dire aux coins supérieurs de la cavité. Nous avons reporté dans la Fig. 4, la valeur du minimum de cisaillement en fonction du rapport d'échelle L/H . On observe que cette quantité est une fonction décroissante du rapport d'échelle, ce qui montre que lorsque le rapport d'échelle augmente les conditions du cisaillement à la limite mobile deviennent semblables à celles d'une interface fluide–fluide.

Ainsi et d'une manière générale, les écoulements induits par une condition d'entraînement de surface ont une structure complexe consistant essentiellement en la juxtaposition d'une recirculation principale adjacente à des tourbillons secondaires dont le nombre, la

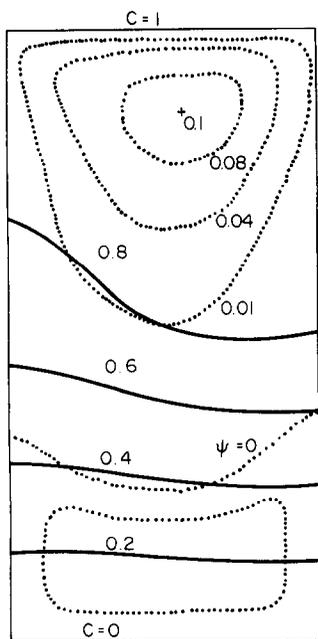


FIG. 3. Répartitions stationnaires des lignes de courant (· · ·) et des lignes d'égal concentration (—) pour $L/H = 0,5$, $Re = 100$ et $Pe = 250$.

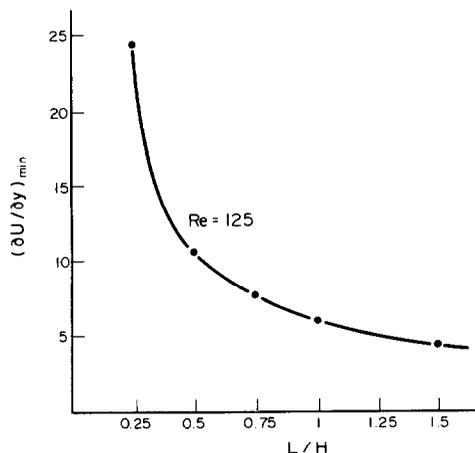


FIG. 4. Valeur du minimum de la distribution du cisaillement le long de la limite mobile en fonction du rapport d'échelle.

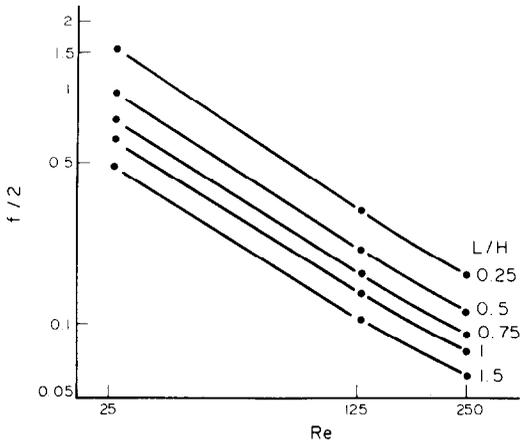


FIG. 5. Variations du facteur de frottement en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs du rapport d'échelle.

localisation et la vorticité apparaissent fortement dépendants à la fois du nombre de Reynolds et du rapport d'échelle de la cavité. On peut donc penser qu'une description du comportement de l'écoulement induit en terme de transfert global de quantité de mouvement, bien que peu utilisée dans la littérature concernant les écoulements en cavité [40], serait souhaitable.

Compte tenu de son importance pratique, les caractéristiques du transfert de quantité de mouvement peuvent être décrites à l'aide du facteur de frottement défini comme suit

$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 L f = \int_0^L \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=H} dx \quad (14)$$

ou sous forme adimensionnelle

$$\frac{f}{2} = \frac{1}{Re} \frac{H}{L} \int_0^{L/H} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{(Y=1)} dX.$$

On a report e dans la Fig. 5, les variations du facteur de frottement en fonction du nombre de Reynolds ($25 \leq Re \leq 250$), pour différents rapports d'échelle ($0,25 \leq L/H \leq 1,5$).

Il faut noter que pour la gamme étudiée, le facteur de frottement est approximativement proportionnel à Re^{-1} , cet exposant de loi-puissance apparaissant comme une limite valable à faible nombre de Reynolds. Ce type de dépendance est évidemment classique dans le cas des écoulements laminaires. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le facteur de frottement tend à d'écarter d'une dépendance en Re^{-1} .

En dépit de l'intérêt pratique que présente le facteur de frottement pour rendre compte de la force nécessaire à maintenir l'écoulement de recirculation, il est intéressant d'introduire ici une autre quantité adimensionnelle pour représenter le transfert de quantité de mouvement à partir de la plaque mobile

$$Nu_M = \frac{f}{2} Re \quad (15)$$

qui représente un nombre de Nusselt mécanique [42].

Ainsi, dans la gamme $Re < 250$ où $f/2 \sim Re^{-1}$, le nombre de Nusselt mécanique Nu_M apparait donc comme une fonction décroissante du seul rapport d'échelle

$$Nu_M = 15,9 (L/H)^{-0,65} \quad 0,25 \leq L/H \leq 1,5. \quad (16)$$

Enfin, la relation donnant le facteur de frottement en fonction du nombre de Reynolds et du rapport d'échelle peut être écrite sous la forme

$$\frac{f}{2} = 15,9 Re^{-1} (L/H)^{-0,65} \quad \begin{matrix} Re < 250 \\ 0,25 \leq L/H \leq 1,5. \end{matrix} \quad (17)$$

4. LE TRANSFERT DE MASSE

Le transfert de masse entre le haut et le bas de la cavité et donc le transfert aux limites est directement relié à l'interaction de convection-diffusion au sein de la cellule. Bien que la littérature concernant les écoulements en cavité soit importante [37-41], peu de résultats sont actuellement disponibles sur les lois de transfert de masse ou de chaleur dans de telles situations [43, 44]. Les champs de concentration pour divers rapports d'échelle et nombre de Reynolds d'entrainement on été ici obtenus par utilisation des champs de vitesse calcul es précédemment dans l'équation de transport de masse (10) avec les conditions aux limites (5). Les champs de concentration peuvent être repr esent es par les lignes d'iso-concentration obtenues par interpolation à travers les points du maillage. Les flux de masse entrant et sortant sont obtenus par intégration numérique des gradients de concentration locaux le long des limites supérieures et inférieures de la cavité.

De la même manière que précédemment, seules les situations stationnaires seront décrites ici, ces régimes étant définis par l'égalité des flux entrant et sortant de la cavité.

L'interaction de diffusion-convection est clairement illustrée dans les Figs. 2 et 3 qui représentent les répartitions de iso-concentrations stationnaires compatibles avec les écoulements correspondants. On y constate tout d'abord l'effet d'entrainement et de distorsion que provoque la recirculation principale sur les lignes d'égale concentration. Celle-ci tend à exclure le profil de concentration du centre de la recirculation. On comprend ainsi qu'il puisse en résulter une forte augmentation des gradients (et donc des flux stationnaires massiques) par rapport au cas diffusionnel pur. Ceci, justifie le rôle important des recirculations dans l'amélioration des coefficients d'échange.

Il faut remarquer que les résultats concernant le transfert de masse calcul es pour différentes combinaisons des nombres de Reynolds et de Schmidt sont identiques lorsque le produit $ReSc$ est conserv e. Le nombre de Péclet $Pe = ReSc$ apparait donc comme le seul nombre adimensionnel nécessaire pour décrire dans les gammes étudiées le transfert de masse dans une cellule de recirculation de rapport d'échelle donn e.

Cette caractéristique est illustrée dans les Figs. 2(a) et (b) obtenues pour des nombres de Reynolds Re et des nombres de Schmidt Sc différents mais tels que le produit $ReSc$ reste constant. On constate que, bien que les solutions pour l'écoulement soit nettement différentes pour ces deux cas, la distribution des iso-concentrations et donc les caractéristiques du transfert massique, γ sont identiques.

Le transfert de masse en régime stationnaire peut être décrit au moyen des flux diffusifs intégrés le long des limites supérieures ou inférieures correspondant respectivement au flux rentrant Φ_e et au flux sortant Φ_s , de la cellule de recirculation

$$\begin{aligned} \Phi_e &= -D \int_0^L \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, H) dx = \Phi_s \\ &= -D \int_0^L \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, 0) dx. \end{aligned} \tag{18}$$

Ce transfert massique à l'équilibre peut être également représenté par le nombre de Sherwood défini comme suit

$$Sh = \frac{\bar{k}H}{D} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{H}{L} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right)_{y=H,0} dx \tag{19}$$

où \bar{k} est la valeur moyenne du coefficient de transfert.

Le nombre de Sherwood est ainsi directement obtenu par intégration numérique de la distribution du gradient de concentration adimensionnel le long de la limite supérieure ou inférieure

$$\begin{aligned} Sh &= \frac{\bar{k}H}{D} = \left(\frac{H}{L} \right) \int_0^{L/H} \left(\frac{\partial C}{\partial Y} \right)(X, 1) dX \\ &= \frac{H}{L} \int_0^{L/H} \frac{\partial C}{\partial Y}(X, 0) dX. \end{aligned} \tag{20}$$

On a représenté dans la Fig. 6, la variation du nombre

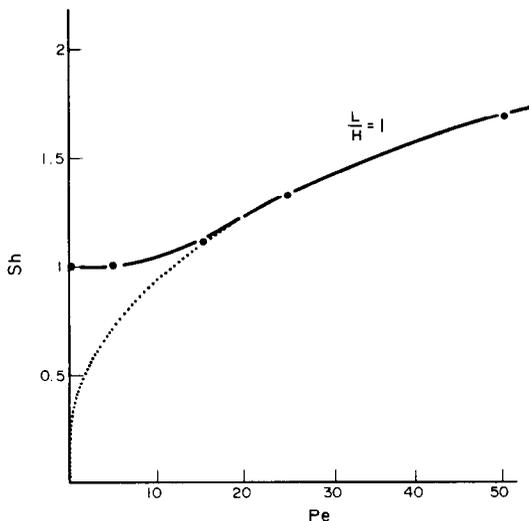


FIG. 6. Variations du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Péclet pour $L/H = 1$.

de Sherwood Sh en fonction du nombre de Péclet Pe pour un rapport d'échelle $L/H = 1$ et dans la gamme des faibles valeurs de Pe . La valeur à l'origine où $Sh = 1$ correspond au cas diffusif pur ce qui montre qu'aux très faibles valeurs du nombre de Péclet ($0 < Pe < 5$) le transfert est dominé par la diffusion. Lorsque le nombre de Péclet croît, la courbe $Sh = Sh(Pe)$ subit une inversion de sa courbure pour $Pe \sim 20$, puis vient se superposer à une courbe type loi de puissance $Sh = 0,41Pe^{0,36}$ pour $Pe > 20$. Ce type de dépendance en $Sh = APe^N$ se maintient dans toute la gamme des nombres de Péclet $25 \leq Pe \leq 500$.

Des comportements similaires ont été obtenus pour les différentes lois $Sh = Sh(Pe)$ calculées pour différents rapports d'échelle L/H des cellules convectives. Les résultats sont reportés dans la Fig. 7, où l'on observe des comportements type lois de puissance pour les fonctions $Sh = Sh(Pe)$. Il est clair que si $Pe < 25$, ces lois de puissance ne s'appliquent plus, les valeurs de Sh tendant vers l'unité quand $Pe \rightarrow 0$, et ceci quelque soit le rapport L/H . Ainsi, et pour la gamme $25 \leq Pe \leq 500$, les variations du nombre de Sherwood sont liées au nombre de Péclet suivant une loi puissance, pour un rapport d'échelle donné

$$\begin{aligned} L/H = 0,25 & \quad Sh = 0,87Pe^{0,06} \\ L/H = 0,5 & \quad Sh = 0,67Pe^{0,15} \\ L/H = 0,75 & \quad Sh = 0,45Pe^{0,36} \\ L/H = 1 & \quad Sh = 0,41Pe^{0,39} \\ L/H = 1,25 & \quad Sh = 0,40Pe^{0,39} \\ L/H = 1,5 & \quad Sh = 0,40Pe^{0,40}. \end{aligned} \tag{21}$$

A la fois l'amplitude A et l'exposant N des lois puissance dépendent fortement du rapport d'échelle L/H (Fig. 7). Ces résultats montrent clairement que les coefficients de transfert sont liés aux paramètres géométriques des écoulements de recirculation, comme cela avait été suggéré par Ruckenstein et Berbente [34] et Javdani [35]. Les relations (21) étant du type

$$Sh = APe^N; \quad 25 \leq Pe \leq 500 \tag{22}$$

l'amplitude A l'exposant N sont alors des fonctions de L/H , soit: $A = A(L/H)$ et $N = N(L/H)$.

Les variations de A et N sont reportées dans la Fig. 8 pour des variations continues de L/H . On constate que lorsque $L/H \rightarrow 0$, alors $N \rightarrow 1$ et donc que $Sh \rightarrow 1$ indépendamment de la valeur de Pe dans la gamme $25 \leq Pe \leq 500$. Cela signifie que le régime de transfert tend vers un comportement de type diffusif pour des cavités étroites et profondes quelque soit l'importance de la vitesse de l'entraînement de la limite. Ceci est lié à la segmentation de l'écoulement en une séquence de tourbillons alternés dans la direction verticale ainsi qu'on l'a constaté précédemment dans le cas de cavités à faibles valeurs du rapport d'échelle.

Un profil quasi linéaire de type diffusif peut alors s'établir dans la majeure partie de la cellule qui se

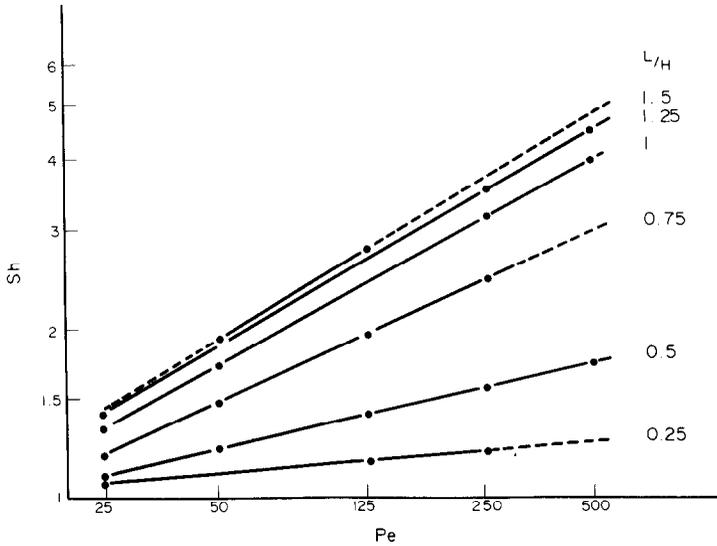


FIG. 7. Variations du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Péclet $24 \leq Pe \leq 500$ pour différents rapports d'échelle.

trouve être occupée principalement par des tourbillons secondaires à très faible recirculation et donc inefficaces pour l'exclusion du champ de concentration.

On peut penser que lorsque L/H augmente, la valeur $N \rightarrow 0,5$ (connue classiquement par ailleurs pour les lois de transfert dans le cas d'interfaces fluide-fluide) représente la plus grande valeur accessible par l'exposant N dans la loi puissance. Ceci résulte de l'effet de déplétion centrale du cisaillement que l'on a constaté le long de la limite en mouvement, lorsque la valeur de L/H croît (Fig. 4), conduisant la limite mobile à se comporter alors de manière analogue à un interface fluide-fluide.

Pour les grandes valeurs du rapport d'échelle ($L/H \rightarrow \infty$), on observe également que $A \rightarrow 0,4$. Ainsi, une loi limite peut être écrite pour le transfert massique

$$Sh = 0,4Pe^{0.5} \tag{23}$$

Enfin, la valeur $N = 1/3$ n'apparaît ici que dans le cas de cavités approximativement carrées ($L/H \sim 1$). Pour

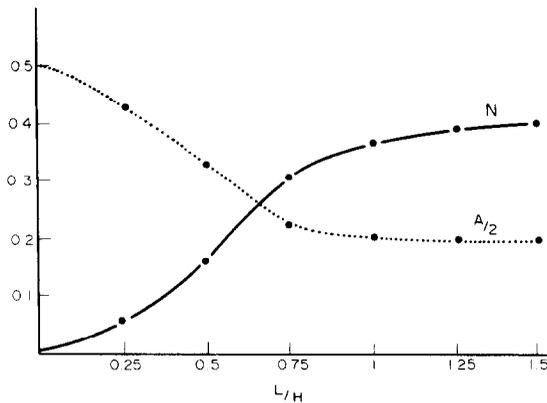


FIG. 8. Variations du coefficient A et de l'exposant N de la relation (22) en fonction du rapport d'échelle et pour la gamme $25 \leq Pe \leq 500$.

un rapport d'échelle $L/H = 1$, la valeur $N = 0,36$ trouvée ici est en bon accord avec le résultat récent obtenu dans ce cas par Salcudean et Abdelrehim [44].

Compte tenu de l'ensemble des remarques faites précédemment, des formes semi-analytiques peuvent être proposées pour les fonctions $N(L/H)$ et $A(L/H)$ dans le cas où une formulation explicite de la loi $Sh = APe^N$ serait nécessaire

$$N(L/H) = 0,5[1 - e^{-1.2L/H}][1 - e^{-6(L/H)^2}] \tag{24}$$

$$A(L/H) = 0,4 + 0,6e^{-3.8(L/H)^2}$$

5. CORRELATION ENTRE LES TRANSFERTS DE QUANTITE DE MOUVEMENT ET DE MASSE

Nous avons présenté et discuté précédemment les caractéristiques des transferts simultanés de quantité de mouvement et de masse dans une cellule de recirculation à l'aide des nombres Nu_M et Sh en fonction des nombres Re ou Pe et du rapport d'échelle L/H .

Il est alors possible d'introduire une corrélation entre ces deux transferts par la construction du rapport

$$\frac{Sh}{Nu_M} = \frac{Sh}{Re f/2} = 0,063 \left(\frac{L}{H}\right)^{0.65} A \left(\frac{L}{H}\right) Pe^{N(L/H)} \tag{25}$$

où $A(L/H)$ et $N(L/H)$ peuvent être exprimés explicitement à l'aide des relations (24).

Une formulation différente utilisant une approche en terme de performance énergétique a été présentée récemment [45] pour discuter les corrélations de transfert. A partir de la définition classique du nombre d'unité de transfert NUT_D pour le transfert massique, on introduit un nombre d'unité de dégradation d'éner-

gie NUE pour l'énergie mécanique. Le rapport NUT_D/NUE est alors l'équivalent d'un coefficient de performance

$$\frac{NUT_D}{NUE} = \frac{Sh}{Nu_M Sc} \quad (26)$$

Sous cette forme, l'analogie classique de Reynolds suivant laquelle $NUT_D = NUE$ ne s'applique pas ici à des structures d'écoulement de recirculation, ainsi qu'on peut le voir à partir de (25).

L'analogie de Colburn peut s'écrire alors sous forme généralisée

$$\frac{NUT_D(Sc)^{2/3}}{NUE} = Lf_D \quad (27)$$

où le nombre Lf_D [46] représente l'écart à l'analogie classique de Colburn. En utilisant l'expression (25) il vient alors

$$Lf_D = 0,063 \left(\frac{L}{H}\right)^{0,65} A \left(\frac{L}{H}\right) Sc^{N-1/3} Re^N \quad (28)$$

qui montre que l'analogie classique, $Lf_D = 1$ ne s'applique pas ici, essentiellement du fait de la structure de l'écoulement de recirculation. Lf_D est lié au nombre de Reynolds par l'intermédiaire d'une loi puissance d'exposant $N = N(L/H)$, N étant compris entre 0 et 0,5 pour les différents rapports d'échelles envisagés. Ce résultat est en accord avec la formulation générale [44] de la dépendance de Lf_D en fonction de Re .

On peut aisément estimer l'efficacité du transfert de masse en fonction du transfert de quantité de mouvement à partir des relations (25) et (26). Cette efficacité exprimée par le rapport NUT_D/NUE apparait comme une fonction des trois variables indépendantes Re , L/H et Sc .

Cette fonction est croissante avec Re et L/H mais décroissante quand le nombre de Schmidt Sc augmente.

Ainsi, dans certaines circonstances, on peut augmenter le transfert de masse sans pour autant augmenter les pertes par frottement, ce qui présente un grand intérêt dans les systèmes d'échanges convectifs.

REFERENCES

1. A. S. Brignell, Solute extraction from an internally circulating spherical liquid drop, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 61 (1975).
2. J. A. C. Humphrey, R. L. Hummel et J. W. Smith, Note on the mass transfer enhancement due to circulation in growing drop, *Chem. Engng Sci.* **29**, 1496 (1974).
3. L. Burkart, P. W. Weathers et P. C. Sharer, Mass transfer and internal circulation in forming drops, *A.I.Ch.E. JI* **22**, 1090 (1976).
4. E. O. Macagno et T. K. Hung, Computational and experimental study of a captive annular eddy, *J. Fluid Mech.* **28**, 43 (1967).
5. I. A. Feuerstein et G. F. Round, Flow in abrupt tube expansions, *Can. J. chem. Engng* **52**, 661 (1974).
6. J. F. Stevenson, Flow in a tube with a circumferential wall cavity, *J. appl. Mech.* **40**, 355 (1973).
7. M. I. S. Azzam et F. A. L. Dullien, Flow in tubes with periodic step changes in diameter: a numerical solution, *Chem. Engng Sci.* **32**, 1445 (1977).
8. E. M. Sparrow et K. P. Wachtler, Transfer coefficients on the surfaces of a transverse plate situated in a duct flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 761 (1978).
9. J. T. Davies et K. V. Warner, The effect of a large-scale roughness in promoting gas absorption, *Chem. Engng Sci.* **24**, 231 (1969).
10. H. C. Lavalley et A. T. Popovich, Fluid flow near roughness elements investigated by photolysis method, *Chem. Engng Sci.* **24**, 49 (1974).
11. P. F. Tomlam et J. L. Hudson, Flow near an enclosed rotating disk: analysis, *Chem. Engng Sci.* **26**, 1591 (1971).
12. P. Mishra et P. Chandra Singh, Mass transfer from spiralling disk, *Chem. Engng Sci.* **33**, 1449 (1978).
13. G. F. Dailey et G. E. Geiger, Analysis of flow separation in an annular expansion. Contraction with inner cylinder rotating, *J. Fluid Engng* **95**, 485 (1973).
14. J. P. Narain, Numerical prediction of confined swirling jets, *Computers and Fluids* **5**, 115 (1977).
15. L. Goldstein, Jr. et E. M. Sparrow, Mass transfer experiments on secondary-flow vortices in a corrugated wall channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 1337 (1976).
16. K. Javdani, Mass transfer in wavy liquid films, *Chem. Engng Sci.* **29**, 61 (1974).
17. V. Pimsner et P. Toma, The wavy aspect of a horizontal co-current air-water film flow and the transport phenomena, *Int. J. Multiphase Flow* **3**, 273 (1977).
18. E. Ruckenstein et D. G. Suci, Simulation of physical models for turbulent mass transfer, *Chem. Engng Sci.* **24**, 1395 (1969).
19. D. T. Hatzivramidis et T. J. Hanratty, The representation of the viscous wall region by a regular eddy pattern, *J. Fluid Mech.* **95**, 655 (1979).
20. L. E. Scriven et C. V. Sterling, On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity, *J. Fluid Mech.* **19**, 321 (1964).
21. R. Higbie, The rate of absorption of pure gas into a still liquid during short periods of exposure, *Trans. A.I.Ch.E. JI* **31**, 365 (1935).
22. P. V. Danckwerts, Significance of liquid film coefficients in gas absorption, *Ind. Engng Chem.* **43**, 1460 (1951).
23. W. E. Dobbins, *Biological treatment of sewage and industrial wastes* (edited by McCabe and Eckenfelder) Part 2-1. Reinhold, New York (1956).
24. H. L. Toor et J. M. Marchello, Film-penetration model for mass and heat transfer, *A.I.Ch.E. JI* **4**, 97 (1958).
25. N. G. Maroudas et H. Sawistowski, Simultaneous transfer of two solutes across liquid-liquid interfaces, *Chem. Engng Sci.* **19**, 919 (1964).
26. V. Linek, Interfacial turbulence accompanying oxygen absorption sulfite solution, *Chem. Engng Sci.* **27**, 627 (1972).
27. V. Linek, V. Machon et Z. Gall, Kotase vzniku mezifazove turbulence indukovane chemisorpci kisliku v rostochich siricitanu sodneko, *Sci. Pap. Inst. Chem. Techn.* **K7**, 217 (1972).
28. N. Imaishi, M. Hozawa et K. Fujinawa, The effect of interfacial turbulence on mass transfer. An expression of the enhancement factor, *J. Chem. Engng Japan* **9**, 499 (1976).
29. G. E. Fortescue et J. R. A. Pearson, On gas absorption into a turbulent liquid, *Chem. Engng Sci.* **22**, 1163 (1967).
30. R. Ruckenstein, Mass transfer into a horizontal layer of stagnant liquid under the action of instabilities, *Can. J. chem. Engng* **49**, 62 (1971).
31. J. C. Lamont et D. S. Scott, An eddy cell model of mass transfer into the surface of a turbulent liquid, *A.I.Ch.E. JI* **16**, 513 (1970).
32. T. G. Theofanous, R. N. Houze et L. K. Brumfield, Turbulence mass transfer at free gas-liquid interface with application to open channel, bubble and jet flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 613 (1976).

33. G. Antonini, G. Guiffant et A. Zoulalian, Mass transfer enhancement induced by a steady interfacial cellular convection, *Chem. Engng J.* **17**, 237 (1979).
34. E. Ruckenstein et C. Berbente, The effect of roll-cells on mass transfer, *Chem. Engng Sci.* **25**, 475 (1970).
35. K. Javdani, Mass transfer with buoyancy driven convective cells, *Chem. Engng J.* **11**, 1 (1976).
36. K. E. Torrance, Comparison of finite-difference computations of natural convection, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **72B**, 281 (1968).
37. J. Bozeman et C. Dalton, Numerical study of viscous flow in a cavity, *J. comp. Phys.* **12**, 348 (1973).
38. O. Burggraf, Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.* **24**, 113 (1966).
39. F. Pan et A. Acrivos, Steady flows in rectangular cavities, *J. Fluid Mech.* **28**, 643 (1967).
40. B. S. Jagadish, Numerical study of transient and steady induced symmetric flows in rectangular cavities, *J. Fluid Engng. Trans. A.S.M.E.* **99**, 526 (1977).
41. M. D. Olson, Comparison problem no. 1. Recirculating flow in a square cavity. Structural Research Series, Report no. 22, Vancouver, British Columbia (1979).
42. P. Le Goff, Signification physique des critères adimensionnels utilisés pour représenter les transferts de matière, de chaleur et de quantité de mouvement, *Chim. Ind. (Génie chim.)* **103**, 1805 (1970).
43. D. Grand, A. Latrobe et P. H. Vernier, Heat transfer by recirculating flow with body forces in a rectangular cavity, *Fifth Int. Heat Trans. Conf.*, p. 197. Japan, Sept. 3-7 (1974).
44. M. Salcudean et Z. Abdelrehim, Heat transfer in turbulent recirculatory flows affected by buoyancy forces in rectangular cavities, *Chem. Engng Commun.* **4**, 249 (1980).
45. P. Le Goff, Performance énergétique des échangeurs de matière et de chaleur: interprétation énergétique des analogies de Reynolds et de Colburn, *Chem. Engng J.* **20**, 197 (1980).
46. J. M. Engasser et C. Horvath, Efficiency of mass and momentum transport in homogeneous and two-phase flow, *Ind. Engng Chem. Fund.* **14**, 107 (1975).

SIMULTANEOUS MOMENTUM AND MASS TRANSFER CHARACTERISTICS IN SURFACE-DRIVEN RECIRCULATING FLOWS

Abstract — Steady momentum and mass transfer characteristics in surface-driven recirculating flows are analysed by solving numerically the full form of vorticity and mass transport equations for various aspect ratio L/H and Reynolds numbers Re associated with the velocity of the moving boundary.

The friction factor f dependence on both L/H and Re is given as

$$f/2 = 15.9Re^{-1}(L/H)^{-0.65} \quad \text{for} \quad \begin{array}{l} 0.25 \leq L/H \leq 1.5 \\ Re < 250 \end{array}$$

together with the Sherwood number Sh for mass transfer which can be expressed as a single power-law involving the Péclet number Pe and aspect-ratio L/H of the problem

$$Sh = A(L/H)Pe^{N(L/H)} \quad \text{for} \quad 25 \leq Pe \leq 500 \quad \text{and} \quad 0.25 < L/H \leq 1.5$$

where A and N are given as explicit functions of aspect-ratio with N varying between 0 and 0.5 in the given range of the L/H values.

The efficiency of the simultaneous momentum and mass transfers is also discussed for these recirculating flows.

GLEICHZEITIGER IMPULS- UND STOFFTRANSPORT BEI OBERFLÄCHENGETRIEBENEN REZIRKULATIONS-STRÖMUNGEN

Zusammenfassung—Der stationäre Impuls- und Stofftransport in oberflächengetriebenen Rezirkulations-Strömungen wird analysiert. Hierzu werden die vollständigen Wirbel- und Stofftransportgleichungen numerisch gelöst, und zwar für verschiedene Seitenverhältnisse L/H und Reynolds-Zahlen Re , wobei diese mit der Geschwindigkeit der sich bewegenden Begrenzung gebildet werden.

Der Reibungsbeiwert zeigt folgende Abhängigkeit von L/H und Re

$$f/2 = 15,9 Re^{-1} (L/H)^{-0,65} \quad \text{für} \quad 0,25 \leq L/H \leq 1,5 \quad Re < 250.$$

Die Sherwood-Zahl Sh für den Stofftransport kann durch einen einfachen Potenzansatz, der die Peclet-Zahl und das Seitenverhältnis L/H enthält, ausgedrückt werden

$$Sh = A(L/H) Pe^{N(L/H)} \quad \text{für} \quad 25 \leq Pe \leq 500 \quad \text{und} \quad 0,25 \leq L/H \leq 1,5.$$

Hierbei sind A und N als explizite Funktionen des Seitenverhältnisses angegeben. N liegt für den angegebenen Bereich von L/H zwischen 0 und 0,5. Die Wirksamkeit des gleichzeitigen Impuls- und Stofftransports wird für diese Rezirkulations-Strömungen ebenfalls erörtert.

**ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНОГО ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА И ТЕПЛА ПРИ
РЕЦИРКУЛЯЦИИ ПОТОКА У ПОВЕРХНОСТИ**

Аннотация — Проведен анализ стационарных характеристик переноса импульса и тепла при рециркуляции потока у поверхности на основе численного решения полных уравнений для вихря и сохранения массы при различных значениях отношения сторон и чисел Рейнольдса, отнесенных к скорости перемещения границы.

Зависимость коэффициента трения f от отношения сторон L/H и числа Re определяется из соотношения

$$f/2 = 15,9Re^{-1}(L/H)^{-0,65} \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} 0,25 \leq L/H \leq 1,5 \\ Re < 250 \end{array}$$

а число Шервуда Sh для переноса массы, которое можно выразить как степенной закон, содержащий число Пекле Pe и отношение сторон L/H , определяется из

$$Sh = A(L/H)Pe^{N(L/H)} \quad \text{при} \quad 25 \leq Pe \leq 500 \quad \text{и} \quad 0,25 < L/H \leq 1,5$$

где A и N определяются как явные функции отношения сторон при изменении N в диапазоне от 0 до 0,5 и заданных значениях L/H . Также обсуждается эффективность совместного переноса импульса и массы при возникновении рециркуляционных потоков такого типа.